

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ และ 2π

มุม	0 0°	$\frac{\pi}{6}$ 30°	$\frac{\pi}{4}$ 45°	$\frac{\pi}{3}$ 60°	$\frac{\pi}{2}$ 90°	π 180°	$\frac{3\pi}{2}$ 270°	2π 360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่นิยาม	0	ไม่นิยาม	0
cot	ไม่นิยาม	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	ไม่นิยาม	0	ไม่นิยาม
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	ไม่นิยาม	-1	ไม่นิยาม	1
csc	ไม่นิยาม	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	ไม่นิยาม	-1	ไม่นิยาม

เอกลักษณ์พื้นฐานของฟังก์ชันตรีโกณมิติ : กำหนด θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

- $\sin \theta \cdot \csc \theta = 1$
- $\cos \theta \cdot \sec \theta = 1$
- $\tan \theta \cdot \cot \theta = 1$
- $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$
- $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$
- $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$
- $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$
- $\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของมุม

$$\begin{aligned}\sin(A + B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \sin(A - B) &= \sin A \cos B - \cos A \sin B \\ \cos(A + B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \cos(A - B) &= \cos A \cos B + \sin A \sin B\end{aligned}$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมสองเท่าและสามเท่า

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= 2 \cos^2 A - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 A$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$$

$$\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

$$\tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมครึ่งหนึ่ง

$$\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$$

ผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$$

$$2 \cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$$

$$2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$$

$$2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$$

ผลบวกหรือผลต่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

1. $\sin(\arcsin x) = x, -1 \leq x \leq 1$
 $\cos(\arccos x) = x, -1 \leq x \leq 1$
 $\tan(\arctan x) = x, x \in \mathbb{R}$
2. $\arcsin(\sin x) = x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
 $\arccos(\cos x) = x, 0 \leq x \leq \pi$
 $\arctan(\tan x) = x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
3. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$
 $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
 $\arctan(-x) = -\arctan x$
4. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$
 $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$
 $\operatorname{arcsec} x + \operatorname{arccsc} x = \frac{\pi}{2}$
5. $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$
 $\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy}$

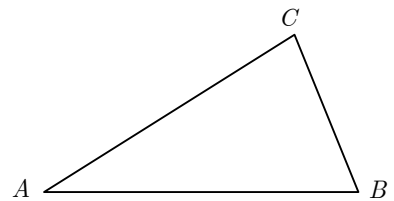
การแก้สามเหลี่ยม : สำหรับสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ

$$A + B + C = 180^\circ$$

จะได้ว่า $A + B = 180^\circ - C$

ฉะนั้น $\sin(A + B) = \sin C$

และได้ $\sin \frac{A+B}{2} = \sin(90^\circ - \frac{C}{2}) = \cos \frac{C}{2}$



1. พื้นที่สามเหลี่ยม $ABC = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B$

2. กฎของไซน์: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

3. กฎของโคไซน์ : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. $a = b \cos C + c \cos B$

$b = c \cos A + a \cos C$

$c = a \cos B + b \cos A$

โจทย์ฝึกหัด

1. ถ้า $\sin A - \cos A = 0$ จงหา $\csc A$

.....
.....
.....

2. จงหาค่าต่ำสุดของ $\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin x + \sqrt{3}\cos x}$

.....
.....
.....

3. ถ้า $\cos \theta - \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ จงหาค่าของ $\sin 2\theta$

.....
.....
.....

4. จงหาค่าของ $\frac{1}{8} \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$

.....
.....
.....

5. จงหาค่าของ $\sin(\arctan 2 + \arctan 3)$

.....
.....
.....

6. จงหาค่าของ $\cos(\arctan 7 + \arcsin \frac{4}{5})$

.....
.....
.....

7. จงหาค่าของ $\sec\left[\frac{1}{2}\left(\arcsin \frac{3}{5} + \arccos \frac{3}{5}\right)\right] + \tan\left[\frac{1}{2}\left(\arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{4}{5}\right)\right]$

.....
.....
.....

ตัวอย่างข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัย

- $\tan 15^\circ + \tan 75^\circ$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 2 3. 3 4. 4
- ถ้า $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{5} = \frac{1}{12}$, $x > 0$ แล้วค่าของ $\frac{\sin^4 2x + \cos^4 2x}{5}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{144}$ 2. $\frac{25}{126}$ 3. $\frac{2}{9}$ 4. $\frac{1}{6}$
- ถ้า $\cos 5\theta = a \cos^5 \theta + b \cos^3 \theta + c \cos \theta$, $\theta \in \mathbb{R}$
แล้วค่าของ $a^2 + b^2 + c^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 681 2. 580 3. 479 4. 378
- ถ้า $x, y \in \mathbb{R}$ โดยที่ $3 \sin(x - y) = 2 \sin(x + y)$ ค่าของ $(\tan^3 x)(\cot^3 y)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 8 2. 27 3. 64 4. 125
- กำหนด $8 \cos 2\theta + 8 \sec 2\theta = 65$, $0 < \theta < 90^\circ$ ค่าของ $160 \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{5\theta}{2}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 45 2. 50 3. 55 4. 60
- ให้ $\sin A - \sin B = \sqrt{\frac{7}{5}}$ และ $\cos A + \cos B = 1$
ค่าของ $14 \cos(A + B)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.4 2. 1.0 3. 1.4 4. 2.8
- $\frac{\sin 25^\circ \sin 85^\circ \sin 35^\circ}{\sin 75^\circ}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\tan 15^\circ$ 2. $\sin 15^\circ \sin 75^\circ$
3. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ 4. $\sec 420^\circ$
- ค่าของ $\frac{\cos^3 7^\circ - \sin 69^\circ}{\cos 7^\circ} + \frac{\sin^3 7^\circ + \cos 69^\circ}{\sin 7^\circ}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1 2. 0 3. 2 4. 3
- ให้ $a, b \in \mathbb{R}$ ที่ $\cos \frac{7\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{a + \sqrt{3}}{4}$ และ $b = \sec \frac{\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}$
ถ้า $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{1}{4}$ แล้วค่าของ $a + 7b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{7}$ 2. $\frac{49}{32}$ 3. $\frac{311}{32}$ 4. $\frac{375}{32}$
- ให้ $A = \cos 15^\circ + \cos 87^\circ + \cos 159^\circ + \cos 231^\circ + \cos 303^\circ$
และ $B = \sin(\arctan \frac{15}{8} + \arccos \frac{4}{5})$
ถ้า $A + B = \frac{a}{b}$ เมื่อ ห.ร.ม.ของ a และ b เท่ากับ 1 แล้วค่าของ $a + b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 136 2. 169 3. 225 4. 289

11. $\cos(\arcsin(-\frac{5}{13}))$ มีค่าเท่ากับข้อใด
1. $\frac{12}{13}$ 2. $-\frac{12}{13}$ 3. $\frac{5}{13}$ 4. $-\frac{5}{13}$
12. $[\sin(2 \arccos \frac{3}{5})][\cos(2 \arctan 2)]$ มีค่าเท่ากับข้อใด
1. $\frac{96}{125}$ 2. $\frac{72}{125}$ 3. $-\frac{24}{25}$ 4. $-\frac{72}{125}$
13. ค่าของ $\cos(2 \arcsin \frac{4}{5} + 2 \arcsin \frac{3}{5})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. -1 2. $-\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. 1
14. กำหนด ABC เป็นสามเหลี่ยมที่มี a, b และ c เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ ถ้ามุม A มีขนาดเป็นสองเท่าของมุม B แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูก
1. $c^2 = a^2 + ab$ 2. $c^2 = b^2 + ab$
 3. $a^2 = b^2 + bc$ 4. $a^2 = c^2 + bc$
15. กำหนด ABC เป็นสามเหลี่ยมที่มี a, b และ c เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ ถ้า $(a + b + c)(b + c - a) = 3bc$ และ $\frac{8}{a^2}(\sin^2 A) = \sin B \sin C$ แล้ว $\frac{5}{\sqrt{3}}$ เท่าของพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 5 2. 10 3. 15 4. 20

ลำดับและอนุกรม

ลำดับคือฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นสับเซตของ $\{1, 2, 3, \dots\}$ หรือเซตของจำนวนเต็มบวก เขียนแทนด้วย a_1, a_2, a_3, \dots

1. **ลำดับเลขคณิต** คือลำดับที่มีผลต่างซึ่งได้จากการนำพจน์ที่ $n + 1$ ลบด้วยพจน์ที่ n เป็นค่าคงที่ที่เท่ากัน สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n เรียกผลต่าง $a_{n+1} - a_n$ ว่าผลต่างร่วม เขียนแทนด้วย d

ลำดับเลขคณิตเขียนได้เป็น $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots, a_1 + (n-1)d, \dots$

พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

ถ้าพบโจทย์ที่จะต้องหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตก่อน โดยกำหนดตัวเลขในลำดับเลขคณิตมาชุดหนึ่งที่เป็นพจน์

เรียงต่อกัน สมมติพจน์ในลำดับเลขคณิตเพื่อคำนวณ a_1 และ d โดยมีหลักการดังนี้

- ถ้าจำนวนพจน์ที่กำหนดให้ มีจำนวนคู่พจน์ ให้สมมติ $\dots, a - 3d, a - d, a + d, a + 3d, \dots$
- ถ้าจำนวนพจน์ที่กำหนดให้ มีจำนวนคี่พจน์ ให้สมมติ $\dots, a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d, \dots$

2. ลำดับเรขาคณิต คือลำดับที่มีอัตราส่วนซึ่งได้จากการนำพจน์ที่ $n + 1$ หารด้วยพจน์ที่ n เป็นค่าคงที่ที่

เท่ากัน สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n เรียกอัตราส่วน $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ว่าอัตราส่วนร่วม เขียนแทนด้วย r

ลำดับเรขาคณิตเขียนได้เป็น $a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, \dots, a_1r^{n-1}, \dots$

พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1r^{n-1}$

ทฤษฎีบทของลิมิตของลำดับ : กำหนด a_n และ b_n เป็นลำดับลู่เข้า ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$, c เป็นค่าคงที่ใด ๆ

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = cA$, c เป็นค่าคงที่ใด ๆ

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = AB$

5. ถ้า $b_n \neq 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n และ $B \neq 0$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$

6. ถ้า $a_n \geq 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n และ $m > 1$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{A}$

7. ถ้า k เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

7.1 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k$ ไม่มีค่า

7.2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$

อนุกรมจำกัด คือผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับจำกัด

นั่นคือ ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ เป็นลำดับจำกัดของจำนวนจริง แล้วอนุกรมจำกัดคืออนุกรมในรูป

$$\sum_{n=1}^k a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$$

อนุกรมอนันต์ คือผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับอนันต์

นั่นคือ ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$ เป็นลำดับอนันต์ของจำนวนจริง แล้วอนุกรมอนันต์คืออนุกรมในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + \dots$$

สมบัติที่สำคัญ

1. ถ้า c เป็นค่าคงที่ แล้ว $\sum_{n=1}^k c = ck$

2. $\sum_{n=1}^k (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^k a_n \pm \sum_{n=1}^k b_n$

3. $\sum_{n=1}^k (ca_n) = c \sum_{n=1}^k a_n$

4. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$

$$5. \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

$$6. \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2 = (1+2+3+\cdots+n)^2$$

ผลบวกของอนุกรมจำกัด

ให้ $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม

- ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตหาได้จาก

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

- ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตหาได้จาก

$$S_n = \frac{a_1 - ra_n}{1 - r}, \quad r \neq 1$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, \quad r \neq 1$$

ผลบวกของอนุกรมอนันต์

กำหนดลำดับของจำนวนจริง a_1, a_2, a_3, \dots ให้

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

S_n คือผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมและลำดับ S_1, S_2, S_3, \dots คือลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม

การหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ จะพิจารณาจากลิมิตลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม โดย

1. ถ้าลำดับ S_n เป็นลำดับลู่เข้าและ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ แล้วอนุกรมอนันต์เป็นอนุกรมลู่เข้า และเรียก S ว่าผลบวกของอนุกรม ผลบวกของอนุกรมอนันต์บางครั้งแทนด้วยสัญลักษณ์ S_∞
2. ถ้าลำดับ S_n เป็นลำดับลู่ออก นั่นคือ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ไม่มีค่า แล้วอนุกรมอนันต์เป็นอนุกรมลู่ออก

จากบทนิยามเกี่ยวกับอนุกรมลู่เข้าและอนุกรมลู่ออก จะได้ว่า

1. อนุกรมเลขคณิตเมื่อเป็นอนุกรมอนันต์ :

ถ้าพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตอยู่ในรูป $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ว่าอนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออกเสมอ ยกเว้น $a_1 = d = 0$

2. อนุกรมเรขาคณิตเมื่อเป็นอนุกรมอนันต์ :

ถ้าพจน์ทั่วไปของอนุกรมเรขาคณิตอยู่ในรูป $a_n = a_1 r^{n-1}$ จะได้ว่า

- อนุกรมเรขาคณิตเป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ $|r| \geq 1$
- อนุกรมเรขาคณิตเป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ $|r| < 1$ และผลบวกของอนุกรม $S = \frac{a_1}{1-r}$

3. **อนุกรมพี** เป็นอนุกรมที่อยู่ในรูป $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$ เมื่อ p เป็นจำนวนจริงใด ๆ
- อนุกรมพีเป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ $p > 1$
 - อนุกรมพีเป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ $p \leq 1$

สมบัติที่สำคัญเกี่ยวกับอนุกรมลู่เข้า

1. ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
 แต่ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ แล้วไม่สามารถสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก
3. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
4. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแต่ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ เป็นอนุกรมลู่ออก

โจทย์ฝึกหัด

1. ถ้า a_1, a_2, a_3, \dots เป็นลำดับเลขคณิตที่ $a_2 + a_3 + \dots + a_9 = 100$
 แล้ว $S_{10} = a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$ มีค่าเท่าใด

.....

2. จงหาจำนวนสมาชิกในเซต $\{100, 101, 102, \dots, 600\}$ ที่หารด้วย 6 หรือ 12 ลงตัว

.....

3. จงหาผลบวก $1 + 6 + 11 + 16 + \dots + 101$

.....

4. จงหาพจน์ที่ 10 ของลำดับ $2, 5, 10, 17, 26, \dots$

.....

5. กำหนด $U = \{1, 2, 3, \dots, 500\}$ จำนวนพจน์ที่ 3 หารลงตัวมีกี่พจน์

.....

6. กำหนด $U = \{200, 201, 202, \dots, 2543\}$ จำนวนพจน์ที่ 5 หาลงตัวมีกี่พจน์

.....
.....
.....

7. จงหาผลบวก $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 209$

.....
.....
.....

8. จงหาผลบวก $2 + 6 + 18 + 54 + \dots + 4374$

.....
.....
.....

9. จงหาผลบวก $2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 468$

.....
.....
.....

10. จงหาผลบวก $\frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{119 \cdot 120}$

.....
.....
.....

11. จงหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม $7 + 77 + 777 + 7777 + \dots$

.....
.....
.....

12. จงหาผลบวก $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (2n-1)^2 - (2n)^2$

.....
.....
.....

ตัวอย่างข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัย

- ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{1000}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ

$$\frac{a_1}{a_1 + 2} = \frac{a_2}{a_2 + 3} = \frac{a_3}{a_3 + 4} = \dots = \frac{a_{1000}}{a_{1000} + 1001}$$
 และ $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{1000} = 250000$ แล้วค่าของ $a_1 + a_{1000}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
 - 250
 - 500
 - 750
 - 1000
- ถ้า $4, a, 9, b, c$ คือ 5 พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตและ $a > 0$ แล้วค่าของ $a + 8c$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
 - 156
 - 160
 - 164
 - 168
- หนังสือเล่มหนึ่งมี 500 หน้า หน้าแรกมีคำผิด 1 คำ เว้นไป 1 หน้า หน้าี่สามมีคำผิด 1 ผิด เว้นไป 3 หน้า หน้าี่เจ็ดมีคำผิด 1 คำ เว้นไป 5 หน้า เช่นนี้เรื่อยไป จำนวนหน้าที่ไม่ม่มีคำผิดจะเพิ่มขึ้นทีละ 2 หน้า จำนวนคำผิดในหนังสือเล่มนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
 - 22
 - 23
 - 24
 - 25
- สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ ให้ $a_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ และ $b_n = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ แล้วจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $\frac{a_2 a_3 \dots a_n}{b_2 b_3 \dots b_n} = 1331$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
 - 36
 - 34
 - 32
 - 30
- กำหนด a_n เป็นลำดับของจำนวนจริงโดยที่ $a_{n+1} = n^2 - a_n, n = 1, 2, 3, \dots$ ค่าของ a_1 ที่ทำให้ $a_{101} = 5100$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
 - 0
 - 25
 - 50
 - 75
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1) - \sqrt{n^2 - 4n}}{\sqrt[3]{n} - 8n^3 + 6n}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด
 - 1
 - $\frac{1}{2}$
 - $\frac{1}{3}$
 - $\frac{1}{4}$
- กำหนด $a_n = \sqrt{n^2 + 16n + 3} - \sqrt{n^2 + 2}, n = 1, 2, 3, \dots$ ค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{a_n}$ เท่ากับข้อใด
 - 0
 - 1
 - 2
 - 8
- กำหนด $a_n = 2 + \frac{5 + 3^{n-1}}{4^{n+3}}$ และ $b_n = \frac{\sqrt[3]{n^3 + 4n}}{\sqrt{4n^2 + 1}}$ ค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ เท่ากับข้อใด
 - 2
 - $\frac{5}{2}$
 - $\frac{9}{4}$
 - หาค่าไม่ได้
- กำหนด $a_n = \frac{1}{4 + 8 + 12 + \dots + 4n}, n = 1, 2, 3, \dots$ ผลบวกของอนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
 - $\frac{1}{2}$
 - $\frac{3}{4}$
 - $\frac{3}{2}$
 - 2

10. ผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5} \left(\frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{n^2 + 7n + 12}} \right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 1 2. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{5}$ 4. $\frac{1}{10}$
11. ผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n^2 + n} + \frac{3}{(-2)^{n-1}} \right]$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 4 2. 3 3. 2 4. 1
12. กำหนดให้ $a_n = \frac{n}{1+3+5+\dots+(2n-1)}$ และ $b_n = \frac{n}{2+4+6+\dots+2n}$
 จะได้ว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ เป็นอนุกรมดังข้อใดต่อไปนี้
1. มีผลบวกเท่ากับ $-\frac{1}{2}$ 2. มีผลบวกเท่ากับ 0
 3. มีผลบวกเท่ากับ $\frac{1}{2}$ 4. ลู่ออก
13. จำนวนจริง $x > 0$ ที่ทำให้ $1 + \frac{6}{1+x} + \frac{15}{(1+x)^2} + \frac{28}{(1+x)^3} + \dots = \frac{27}{4}$ คือข้อใดต่อไปนี้
1. 0.5 2. 1 3. 2 4. 3
14. กำหนด $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิตของจำนวนจริงบวก ที่มี r เป็นอัตราส่วนร่วม และ

$$\frac{a_1 + a_3}{a_2 + a_4} + \frac{a_3 + a_5}{a_4 + a_6} + \frac{a_5 + a_7}{a_6 + a_8} + \dots + \frac{a_{2011} + a_{2013}}{a_{2012} + a_{2014}} = 2012$$
 ค่าของ $1 + 5r + 12r^2 + 22r^3 + \dots$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 2 2. 4 3. 8 4. 16
15. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิต ซึ่งมี r เป็นอัตราส่วนร่วม เมื่อ $0 < r < 1$
 ถ้า $G_n = (a_1 a_2 a_3 \dots a_n)^{1/n}$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} G_n$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{a_1}{1-r^2}$ 2. $\frac{a_1}{\sqrt{1-r}}$ 3. $\frac{a_1}{1-r^2}$ 4. $\frac{a_1}{\sqrt{1-r^2}}$

ระบบจำนวนจริง

กำหนด a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

สมบัติ	สำหรับการบวก	สำหรับการคูณ
1. ปิด	$a + b$ เป็นจำนวนจริง	ab เป็นจำนวนจริง
2. การสลับที่	$a + b = b + a$	$ab = ba$
3. การเปลี่ยนกลุ่ม	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a(bc) = (ab)c$
4. การมีเอกลักษณ์	มี $0 \in \mathbb{R}$ ซึ่งสำหรับทุก $a \in \mathbb{R}$, $a + 0 = a = 0 + a$	มี $1 \in \mathbb{R}$ ซึ่งสำหรับทุก $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
5. การมีอินเวอร์ส	ทุก $a \in \mathbb{R}$ มี $-a \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $a + (-a) = 0 = (-a) + a$	ทุก $a \neq 0$ มี $a^{-1} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$, $a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a$
6. การแจกแจง	$a(b + c) = ab + ac$	

ตัวอย่าง 1 ข้อใดมีทั้งจำนวนเต็ม, จำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะ

- | | |
|---|--|
| 1. $-7.222\dots, \sqrt{3}, \pi - \frac{1}{7}$ | 2. $11, \sqrt[3]{-8}, 2.555$ |
| 3. $\frac{1}{2}, -\pi, \sqrt{9} - 1$ | 4. $-\frac{3}{5}, 6.060060006\dots, \sqrt{1000}$ |
| 5. $\sqrt{2} - 0.414, \pi^2, 4.718$ | |

ตัวอย่าง 2 ให้ a และ b เป็นจำนวนตรรกยะที่แตกต่างกัน
ให้ c และ d เป็นจำนวนอตรรกยะที่แตกต่างกัน
พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก. $a - b$ เป็นจำนวนตรรกยะ
ข. $c - d$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1. ก. ถูก และ ข. ถูก | 2. ก. ถูก และ ข. ผิด |
| 3. ก. ผิด และ ข. ถูก | 4. ก. ผิด และ ข. ผิด |

ทฤษฎีบทเศษเหลือ : กำหนดพหุนาม $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
จะได้ว่าเศษที่ได้จากการหารพหุนาม $p(x)$ ด้วย $x - c$ คือ $p(c)$

ทฤษฎีบทตัวประกอบ : กำหนดพหุนาม $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
จะได้ว่าพหุนาม $x - c$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของพหุนาม $p(x)$ ก็ต่อเมื่อ $p(c) = 0$

สมบัติไตรวิภาค : สำหรับจำนวนจริง a และ b ใด ๆ ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงเพียงข้อเดียวเท่านั้น

(1) $a = b$ หรือ (2) $a < b$ หรือ (3) $a > b$

วิธีการหาคำตอบของสมการทำได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 ถ้าด้านขวาของสมการที่โจทย์กำหนดยังไม่เป็นศูนย์ ให้ทำด้านขวาของสมการให้เป็นศูนย์

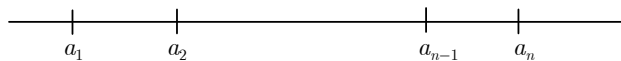
ขั้นที่ 2 แยกตัวประกอบของพหุนามทางซ้ายมือ สมมติว่าแยกได้เป็น

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{n-1})(x - a_n) \quad \text{โดยที่ } a_1 < a_2 < \dots < a_n$$

ขั้นที่ 3 หาค่า x ที่ทำให้แต่ละวงเล็บ $(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{n-1})(x - a_n) = 0$

จะได้ $x = a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$

ขั้นที่ 4 เขียนค่า x ทั้งหมดลงบนเส้นจำนวน



ขั้นที่ 5 ใส่เครื่องหมายบวกและลบสลับกันไป โดยเริ่มใส่เครื่องหมาย + จากขวามือสุดก่อน



ขั้นที่ 6 ถ้าสมการในโจทย์ เป็นเครื่องหมาย " < 0 " ให้ตอบในช่วงที่เป็นเครื่องหมายลบ

ถ้าสมการในโจทย์ เป็นเครื่องหมาย " > 0 " ให้ตอบในช่วงที่เป็นเครื่องหมายบวก

และถ้าสมการมี " $=$ " รวมอยู่ด้วย คำตอบของสมการจะมีเท่ากับรวมอยู่ด้วยเช่นกัน

คำสมบัติของจำนวนจริง a เขียนแทนด้วย $|a|$ นิยามโดย

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

สมบัติที่สำคัญของคำสมบัติ : กำหนด a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. $|a| \geq 0$
2. $|a| = |-a|$
3. $|a^2| = |a|^2 = a^2$
4. $\sqrt{a^2} = |a|$
5. $|ab| = |a||b|$
6. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$
7. $|a - b| = |b - a|$
8. $|a + b| \leq |a| + |b|$
9. $|a - b| \geq ||a| - |b|| \geq |a| - |b|$
10. $|a| = |b|$ ก็ต่อเมื่อ $a = \pm b$
11. ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว
 - 11.1 $|x| < a$ ก็ต่อเมื่อ $-a < x < a$
 - 11.2 $|x| \leq a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leq x \leq a$

12. ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว
- 12.1 $|x| > a$ ก็ต่อเมื่อ $x < -a$ หรือ $x > a$
- 12.2 $|x| \geq a$ ก็ต่อเมื่อ $x \leq -a$ หรือ $x \geq a$

โจทย์ฝึกหัด

1. นิยาม $a * b = a^b$ สำหรับ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริง แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $a * (b * c) = (a * b) * c$
2. $(a * b) * c = a * (bc)$
3. $a * (b * c) = (a * c) * b$
4. $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$

2. ให้ $f(x) = x^3 - ax^2 + ax + b$ โดย a เป็นจำนวนจริงบวก

ถ้า $x - a$ ทหาร $f(x)$ เหลือเศษ 23 และ $x - 1$ ทหาร $f(x)$ เหลือเศษ 8

จงหาค่าของ $a + 2b$

.....

.....

3. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง

ถ้า $ax^5 + bx + 4$ ทหารด้วย $(x - 1)^2$ ลงตัว แล้ว $a - b$ เท่ากับเท่าใด

.....

.....

.....

4. จงแก้สมการแต่ละข้อต่อไปนี้

- (1) $(x - 2)^5(x - 3)^7 \geq 0$
- (2) $(x - 2)^9(x - 3)^{20} < 0$
- (3) $(x - 2)^{15}(x - 3)^{24}(x - 4)^{37} > 0$
- (4) $(x - 2)^{11}(x - 3)^{24}(x - 4)^{53} \leq 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. ถ้าเซตคำตอบของสมการ $|3 - 2x| - |3x - 7| \geq 0$ คือช่วง $[a, b]$
แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

.....

6. ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $|x - 4| + |x - 3| = 1$ แล้วเซต A คือเซตใด

.....

7. ถ้า A คือเซตของจำนวนเต็ม x ที่สอดคล้องกับสมการ $|x - 25| + |x - 53| \neq |2x - 78|$
จงหาสมาชิกค่าน้อยที่สุดของ A

.....

ตัวอย่างข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัย

1. ข้อใดต่อไปนี้มีจำนวนตรรกยะอยู่เพียงสองจำนวน

1. $-\sqrt{4}, \pi - \frac{22}{7}, 1.010010001$ 2. $\sqrt[3]{2}, \sqrt{8}, \pi^2$

3. $\pi + 1, \sqrt{16}, 0.101001000100001\dots$ 4. $\frac{9}{11}, 1.11111\dots, \sqrt[3]{8}$

2. นิยาม $a * b = (a + 1)(b + 1) - 1$ ทุกจำนวนจริง a และ b ใด ๆ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $(a - 1) * (a + 1) = (a * a) - 1$ 2. $a * (b + 2) = (a * b) + (a * 2)$

3. $a * (b * 2) = (a * b) * 2$ 4. $a * (a * b) = (a + 1)(a * b) + a$

3. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a > 0$ และ $b > 1$

ถ้า $ab = a^b$ และ $b = ab^{3a}$ แล้ว $20a + 14b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 66 2. 44 3. 33 4. 11

4. กำหนด $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริง

ถ้า $x + 1$ และ $x - 2$ ต่างก็หาร $P(x)$ แล้วเหลือเศษ 10 แล้วค่าของ $3a + b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1 2. -3 3. 3 4. 1

5. กำหนด $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 3

ถ้า $x - 1, x - 2$ และ $x - 3$ ต่างก็หาร $P(x)$ แล้วเหลือเศษ 1 และ $x - 4$ หาร $P(x)$ ลงตัว
แล้ว $P(5)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -3 2. -1 3. 0 4. 1

6. ข้อใดเป็นตัวประกอบของพหุนาม $2x^3 + 4x^2 - 6x - 12$
1. $x + 2, x - \sqrt{3}, x + \sqrt{3}$ 2. $x + 2, x - \sqrt{3}, x + 2\sqrt{3}$
 3. $x - 2, x - \sqrt{3}, x + \sqrt{3}$ 4. $x - 2, x - 2\sqrt{3}, x + \sqrt{3}$
7. กำหนด A เป็นเซตคำตอบของสมการ $x^3 + x^2 - 27x - 27 = 0$
 และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $x^3 + (1 - \sqrt{3})x^2 - (36 + \sqrt{3})x - 36 = 0$
 $A \cap B$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้
1. $[1, 5\sqrt{3}]$ 2. $[0, 3\sqrt{5}]$ 3. $[-1.1, 0]$ 4. $[-3\sqrt{5}, -0.9]$
8. ให้ S เป็นเซตคำตอบของสมการ $(x - 1)(x - 2)^2(x - 3)^3 \dots (x - 10)^{10} \leq 0$
 ข้อใดต่อไปนี้ เป็นจำนวนสมาชิกของ $S \cap \{0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 9.9, 10.0\}$
1. 26 2. 36 3. 46 4. 56
9. ข้อใดเป็นคำตอบของสมการ $\frac{x^2 + x - 6}{x - 4} \leq 0$
1. $(-\infty, -3] \cup [2, 4)$ 2. $(-\infty, -2] \cup (4, \infty)$
 3. $[-3, 2] \cup (4, \infty)$ 4. $(-\infty, -3] \cup [2, \infty)$
10. ให้ A เป็นเอกภพสัมพัทธ์ที่ทำให้ประพจน์ $\forall [2x^2 + x - 3 \leq 0$ และ $|x - 2| \leq 3]$
 มีค่าความจริงเป็นจริง และให้ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $6x^{-2} - 5x^{-1} - 1 > 0$
 ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
1. $A \subset B$ 2. $A - B$ มีสมาชิก 2 ตัว
 3. $(A - B) \cup (B - A) = (-6, 1)$ 4. $(-6, 0) \subset B - A$
11. กำหนด $a, b \in \mathbb{R}$ ที่ $a < b$
 เซตคำตอบของสมการ $|x - a| - |x - b| = b - a$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\{b\}$ 2. (a, b) 3. $[b, \infty)$ 4. $(\frac{a+b}{2}, \infty)$
12. ถ้า A แทนเซตคำตอบของสมการ $|2 - 2x| + |x + 2| = 4 - x$
 แล้วเซต A เป็นสับเซตของข้อใดต่อไปนี้
1. $(-4, 0)$ 2. $(-1, 1)$ 3. $(0, 4)$ 4. $(-3, 2)$
13. ถ้า $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{|1-x|-2}{x+|x|-3} > 1\}$ แล้ว $A \cap [0, 1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 2. $(\frac{1}{3}, 1)$ 3. $(\frac{2}{3}, 1)$ 4. $(\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$
14. ให้ S เป็นเซตคำตอบของสมการ $|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 10| = |10x - 55|$
 จำนวนสมาชิกของเซต $S \cap \{-100, -99, \dots, 0, \dots, 99, 100\}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 199 2. 193 3. 100 4. 20
15. ให้ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 5| + |x| \leq 7\}$
 และ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 12 + |x|\}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $A \cap B \subset \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 4\}$

ข. $A - B$ เป็นเซตจำกัด

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก

2. ก. ถูก และ ข. ผิด

3. ก. ผิด และ ข. ถูก

4. ก. ผิด และ ข. ผิด

~~~~~

**ความน่าจะเป็น**

**กฎข้อ 1 : กฎการคูณ**

ในการทำงานอย่างหนึ่งประกอบด้วย  $k$  ขั้นตอน โดย ขั้นตอนที่ 1 มีวิธีเลือกทำได้  $n_1$  วิธี  
ในแต่ละวิธีของขั้นตอนที่ 1 มีวิธีเลือกทำขั้นตอนที่ 2 ได้  $n_2$  วิธี  
ในแต่ละวิธีของขั้นตอนที่ 2 มีวิธีเลือกทำขั้นตอนที่ 3 ได้  $n_3$  วิธี  
:  
เช่นนี้เรื่อยไปจนถึงขั้นตอนสุดท้ายคือ ขั้นตอนที่  $k$  ทำได้  $n_k$  วิธี  
ดังนั้น จำนวนวิธีทำงานทั้งหมดได้  $n_1 n_2 n_3 \cdots n_k$  วิธี

**กฎข้อ 2 : กฎการบวก**

ในการทำงานอย่างหนึ่งประกอบด้วย  $k$  วิธี คือวิธีที่ 1 ถึงวิธีที่  $k$  โดย  
การทำงานวิธีที่ 1 ทำได้  $n_1$  วิธี  
การทำงานวิธีที่ 2 ทำได้  $n_2$  วิธี  
:  
เช่นนี้เรื่อยไปจนถึงขั้นตอนสุดท้ายคือการทำงานวิธีที่  $k$  ทำได้  $n_k$  วิธี  
ถ้าต้องการเลือกทำงานวิธีใดวิธีหนึ่งเพียงหนึ่งวิธีเท่านั้น จะได้จำนวนวิธีในการทำงานนี้  
เท่ากับ  $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k$  วิธี

**บทนิยาม** กำหนด  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก **แฟกทอเรียล**  $n$  เขียนแทนด้วย  $n!$  นิยามโดย  
$$n! = n \cdot (n - 1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$
  
และ  $0! = 1$

**กฎข้อ 3 : วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นตรง**

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นตรงของสิ่งของ  $n$  สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด เท่ากับ  $n!$  วิธี

**กฎข้อ 4 : วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด**

ถ้ามีสิ่งของ  $n$  สิ่ง ในจำนวนนี้มี  $n_1$  สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่หนึ่ง

มี  $n_2$  สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่สอง

⋮

มี  $n_k$  สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่  $k$  โดยที่  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ  $n$  สิ่ง เท่ากับ  $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$  วิธี

**กฎข้อ 5 : วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม**

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของ  $n$  สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด เท่ากับ  $(n - 1)!$  วิธี

**กฎข้อ 6** จำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกัน  $n$  สิ่ง โดยเลือกคราวละ  $r$  สิ่ง เมื่อ  $0 \leq r \leq n$

เท่ากับ  $\binom{n}{r}$  หรือ  $C_{n,r}$  วิธี โดย  $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

**สมบัติที่น่าสนใจ :** กำหนด  $n, r_1$  และ  $r_2$  เป็นจำนวนเต็มที่  $0 \leq r_1, r_2 \leq n$

1.  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2.  $\binom{n}{r} = \binom{n}{s}$  ก็ต่อเมื่อ  $r + s = n$  หรือ  $r = s$
3.  $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$

**กฎข้อ 7 : วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด**

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ  $n$  สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยจัดเรียงคราวละ  $r$  สิ่ง เมื่อ  $1 \leq r \leq n$

เท่ากับ  $P_{n,r}$  วิธี โดย  $P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

### โจทย์ฝึกหัด

1. จงหาจำนวนวิธีในการสร้างเลขสามหลักจากเลขโดด 0, 1, 2, 3, 4, 5 และ 6 เมื่อ
  1. ไม่มีเงื่อนไขใด ๆ
  2. เป็นเลขคี่
  3. เป็นเลขคู่
  4. แต่ละหลักใช้เลขไม่ซ้ำกัน
  5. เป็นเลขคี่ที่แต่ละหลักใช้เลขไม่ซ้ำกัน
  6. เป็นเลขคู่ที่แต่ละหลักใช้เลขไม่ซ้ำกัน

.....  
.....

2. มาลีต้องการเดินทางจากเมือง A ไปยังเมือง C โดยต้องเดินทางผ่านไปยังเมือง B ก่อน จากเมือง A ไปยังเมือง B มาลีสามารถเลือกเดินทางโดยรถยนต์ รถไฟ หรือเครื่องบินได้ แต่จากเมือง B ไปยังเมือง C สามารถเดินทางไปเร็ว รถยนต์ รถไฟ หรือเครื่องบิน จงหาจำนวนวิธีในการเดินทางจากเมือง A ไปเมือง C ที่จะต้องเดินทางโดยรถไฟ เป็นจำนวน 1 ครั้ง

.....

.....

3. จงหาจำนวนวิธีในการจัดผู้ชาย 3 คน และผู้หญิง 2 คนมายืนเรียงแถวหน้ากระดานหนึ่งแถว โดย

1. ไม่มีเงื่อนไขใด ๆ
  2. ผู้ชายทั้งสามคนยืนติดกัน
  3. ผู้ชายทั้งสามคนยืนติดกัน และผู้หญิงทั้งสองคนยืนติดกัน
- .....
- .....

4. จัดคน 8 คน ซึ่งมีสมชาย สมคิด และสมศรี รวมอยู่ด้วย เข้านั่งเรียงกันเป็นแถวตรง โดยที่สมศรีนั่งกลาง ติดกับสมชายและสมคิดเสมอ จงหาจำนวนวิธีการจัดที่นั่งดังกล่าว

.....

.....

5. ในการจัดหลอดไฟสีต่าง ๆ เพื่อประดับตามแนวเส้นตรงจำนวน 8 หลอด ถ้ามีหลอดไฟสีแดง 3 หลอด สีเหลือง 3 หลอด สีเขียว 1 หลอด และสีน้ำเงิน 1 หลอด จงหาจำนวนวิธีการจัดเรียงหลอดไฟสีดังกล่าว โดยไม่ให้หลอดไฟสีเขียวและสีน้ำเงินติดกัน

.....

.....

6. คุณลุง คุณป้า ลูกชาย และลูกสาว มาเยี่ยมครอบครัวเราซึ่งมี 4 คน คือ คุณพ่อ คุณแม่ ตัวฉัน และน้องชาย ในการจัดที่นั่งรอบโต๊ะอาหารกลมที่มี 8 ที่นั่ง โดยให้คุณลุงนั่งติดกับคุณพ่อ คุณป้านั่งติดกับคุณแม่ ลูกชายของคุณลุงนั่งติดกับน้องชายของฉัน และลูกสาวของคุณลุงนั่งติดกับฉัน จะมีจำนวนวิธีจัดได้เท่ากับเท่าใด

.....

.....

7. การเลือกตั้งสมาชิกสภาผู้แทนราษฎรของจังหวัดหนึ่งซึ่งมีสมาชิกได้ 3 คน มีพรรคการเมืองจำนวนทั้งสิ้น 4 พรรค ส่งผู้สมัครรับเลือกตั้งพรรคละ 3 คน จงหาจำนวนวิธีที่ผู้ได้รับการเลือกตั้งจะอยู่ต่างพรรคกันทั้งหมด

.....

.....

### ความน่าจะเป็น

**การทดลองสุ่ม** คือการทดลองหรือการกระทำใด ๆ ที่ทราบว่าผลลัพธ์เป็นอะไรบ้างแต่ไม่สามารถบอกได้แน่นอน  
**ปริภูมิตัวอย่าง** หรือ **แซมเปิลสเปซ** คือเซตของผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้จากการทดลองสุ่ม

เรียกสมาชิกแต่ละตัวของปริภูมิตัวอย่างว่าจุดตัวอย่าง

เหตุการณ์ คือสับเซตของปริภูมิตัวอย่าง

ให้  $S$  แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มที่แต่ละจุดตัวอย่างของการทดลองมีโอกาสเกิดขึ้นเท่าๆกัน และ  $E$  แทนเหตุการณ์

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์  $E$  เขียนแทนด้วย  $P(E)$  กำหนดโดย  $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

เมื่อ  $n(E)$  เป็นจำนวนสมาชิกในเหตุการณ์  $E$

และ  $n(S)$  เป็นจำนวนสมาชิกในปริภูมิตัวอย่าง  $S$

### โจทย์ฝึกหัด

9. ข้าวสารบรรจุถุงแล้วกองหนึ่งประกอบด้วย ข้าวหอมมะลิ 4 ถุง ข้าวเสาไห้ 3 ถุง ข้าวขาวตาแห้ง 2 ถุง และ ข้าวบัสมาตี 1 ถุง สุ่มหยิบข้าวจากกองนี้มา 4 ถุง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ข้าวครบทุกชนิด

.....

10. ในการจัดคน 12 คน (มี GAT และ PAT รวมอยู่ด้วย) นั่งรับประทานอาหารรอบโต๊ะกลม ความน่าจะเป็นที่ GAT และ PAT ไม่ได้นั่งติดกันเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

.....

สมบัติของความน่าจะเป็น : กำหนด  $A, B$  และ  $C$  เป็นเหตุการณ์ใด ๆ

1.  $0 \leq P(A) \leq 1$

2.  $P(\emptyset) = 0$  และ  $P(S) = 1$

3.  $P(A') = 1 - P(A)$

4.  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

5.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

6. ถ้า  $A$  และ  $B$  เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน แล้ว  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

7.  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

11. ถ้า  $A$  และ  $B$  เป็นเหตุการณ์ซึ่ง  $P(A' \cap B) = P(A \cap B') = P(A \cap B) = 0.15$  แล้ว  $P((A \cup B)')$  มีค่าเท่าใด

.....

ตัวอย่างข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัย

- ต้องการสร้างจำนวนที่มี 7 หลัก จากเลขโดด 7 ตัว คือ 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6 โดยให้เลข 3 สองตัวอยู่ติดกัน จะสร้างได้ทั้งหมดกี่จำนวน (720)
- ต้องการนำเลขโดด 1, 1, 2, 2, 3, 3 ทั้ง 6 ตัว มาจัดเรียงเป็นจำนวนที่มี 6 หลัก จะสร้างจำนวนที่มี 6 หลักได้ทั้งหมดกี่จำนวน เมื่อเลข 1 ทั้งสองตัวไม่ติดกัน และเลข 3 ทั้งสองตัวไม่ติดกัน (48)
- ในการเรียงสับเปลี่ยนชุดตัวอักษร **AAABBB** โดยมีตัวอักษรอย่างน้อยสองตัวติดกันเป็นตัวอักษรตัวเดียวกัน จะมีจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนกี่วิธี (18)
- จังหวัดแห่งหนึ่งมีอำเภอ 6 อำเภอ แต่ละอำเภอส่งผู้แทนอำเภอละ 2 คน เป็นชาย 1 คน และเป็นหญิง 1 คน ถ้าต้องการคัดเลือกกรรมการ 4 คน เป็นชาย 2 คน และหญิง 2 คน จากตัวแทนทั้ง 12 คนโดยในบรรดากรรมการ 4 คนนี้ ต้องเป็นชายและหญิงอย่างน้อย 1 คู่มาจากอำเภอเดียวกัน จะมีวิธีคัดเลือกกี่วิธี (135)
- ในการจัดเด็ก 7 คน ซึ่งมีอายุ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ขวบ นั่งเก้าอี้ 7 ตัว ซึ่งติดหมายเลข 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 โดยกำหนดให้เด็กที่จะนั่งเก้าอี้หมายเลข  $k$  ต้องมีอายุมากกว่าหรือเท่ากับ  $k - 1$  ขวบ จะมีจำนวนวิธีในการจัดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้  
 1. 32                                      2. 60                                      3. 64                                      4. 120
- นักเรียนกลุ่มหนึ่งมี 16 คน ซึ่งแต่ละคนเป็นสมาชิกของชมรมวิชาการ หรือ ชมรมกีฬา หรือ ชมรมดนตรีอย่างน้อย 1 ชมรม และพบว่า มี 8 คน เป็นสมาชิกของชมรมวิชาการ, มี 10 คน เป็นสมาชิกของชมรมกีฬา, มี 10 คน เป็นสมาชิกของชมรมดนตรี, มี 6 คน เป็นสมาชิกของชมรมดนตรีและชมรมกีฬา, มี 5 คน เป็นสมาชิกของชมรมวิชาการและชมรมกีฬา และมี 3 คน เป็นสมาชิกของชมรมวิชาการและชมรมดนตรี ต้องการเลือกผู้แทน 1 คน ของแต่ละชมรมโดยที่แต่ละคนต้องเป็นสมาชิกเพียงชมรมเดียวเท่านั้น จำนวนวิธีเลือกดังกล่าวมีทั้งหมดเท่ากับเท่าใด (6)
- ในการโยนลูกเต๋าสองลูกจำนวนหนึ่งครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลคูณของแต้มบนลูกเต๋าสองลูกด้วย 4 ลงตัว เท่ากับข้อใดต่อไปนี้  
 1.  $\frac{6}{36}$                                       2.  $\frac{11}{36}$                                       3.  $\frac{15}{36}$                                       4.  $\frac{27}{36}$
- ในการทอดลูกเต๋าสองลูกพร้อมกัน ความน่าจะเป็นที่หน้าของลูกเต๋าลูกหนึ่งขึ้นแต้ม  $a$  และหน้าของลูกเต๋าลูกหนึ่งขึ้นแต้ม  $b$  โดยที่  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้  
 1.  $\frac{1}{9}$                                       2.  $\frac{1}{6}$                                       3.  $\frac{1}{18}$                                       4.  $\frac{1}{12}$
- ในลิ้นชักมีถุงเท้าสีขาว 4 คู่ สีดำ 3 คู่ และสีน้ำเงิน 2 คู่ แต่ไม่ได้จัดเรียงไว้เป็นคู่ๆ ถ้าสุ่มหยิบถุงเท้ามา 2 ข้าง ความน่าจะเป็นที่จะได้ถุงเท้าสีเดียวกันเท่ากับข้อใดต่อไปนี้  
 1.  $\frac{1}{2}$                                       2.  $\frac{2}{3}$                                       3.  $\frac{43}{153}$                                       4.  $\frac{49}{153}$
- นักเรียนห้องหนึ่งมีจำนวน 30 คน สอบวิชาคณิตศาสตร์ได้เกรด A 5 คน, ได้เกรด B 15 คน และได้เกรด C 10 คน ถ้าสุ่มเลือกนักเรียน 3 คน จากห้องนี้ แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้นักเรียนอย่างน้อย

1 คนที่ได้เกรด A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1.  $\frac{55}{203}$                       2.  $\frac{66}{203}$                       3.  $\frac{77}{203}$                       4.  $\frac{88}{203}$

11. กำหนดให้  $A$  และ  $B$  เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ในแซมเปิลสเปซ

และกำหนดให้  $P(E)$  แทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์  $E$

ถ้า  $P(B) = 0.30$ ,  $P(A \cap B) = 0.06$  และ  $P((A \cup B) - (A \cap B)) = 0.38$

แล้วค่าของ  $P(A - B)$  เท่ากับเท่าใด (0.14)

12. กำหนดให้  $A$  และ  $B$  เป็นเหตุการณ์ในปริภูมิตัวอย่าง ถ้า  $P(B - A) = 0.2$ ,  $P(B) = 0.6$

และ  $P(A' \cup B) = 0.8$  แล้วค่าของ  $P(A \cup B')$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.2                      2. 0.4                      3. 0.6                      4. 0.8

13. กำหนดให้  $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \{-1, 0, 1\} \right\}$

ถ้าสุ่มเลือกเมทริกซ์หนึ่งเมทริกซ์จากเซต  $M$  แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้เมทริกซ์ที่มีอินเวอร์สการคูณมีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1.  $\frac{24}{81}$                       2.  $\frac{31}{81}$                       3.  $\frac{33}{81}$                       4.  $\frac{48}{81}$

14. กำหนดให้  $S = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$  และ  $M = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix} \middle| a_i \in S, 1 \leq i \leq 6 \right\}$

สุ่มหยิบเมทริกซ์จากเซต  $M$  มา 1 เมทริกซ์ ความน่าจะเป็นที่จะได้เมทริกซ์ซึ่งมีค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์นั้นเท่ากับ 27 หรือ  $-27$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1.  $\frac{2}{6^3}$                       2.  $\frac{4}{6^3}$                       3.  $\frac{6}{6^3}$                       4.  $\frac{8}{6^3} \frac{10}{6^3}$

15. กำหนด  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  และ  $B = \{p(x) \mid p(x) = ax^2 + bx + c \text{ เมื่อ } a, b, c \in A\}$

สุ่มหยิบ  $p(x)$  มาหนึ่งตัวจากเซต  $B$  ความน่าจะเป็นที่จะได้  $p(x)$  ซึ่ง  $\int_0^1 p(x) dx$  มีค่าเป็นจำนวนเต็มเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1.  $\frac{1}{12}$                       2.  $\frac{2}{12}$                       3.  $\frac{3}{12}$                       4.  $\frac{4}{12}$